文章编号:1000-4939(2024)06-1336-07

基于 PSO-ANFIS 模型的矩形薄板荷载情况反演

张宇鹏[1],刘韡[2]

(1. 西安建筑科技大学土木工程学院,710055 西安;2. 西安建筑科技大学理学院,710055 西安)

摘 要:荷载情况反演在汽车工程和医学等领域有重要意义,目前常用的方法普遍存在需要的观测点较多、计算量大和计算效率低的问题。为了通过少量观测点的挠度高效准确地反演矩形薄板荷载情况,建立了基于粒子群算法(particle swarm optimization,PSO)改进自适应神经模糊网络(adaptive network-based fuzzy inference system,ANFIS)的反演模型。利用解析法求解矩形薄板在不同集中荷载作用下的挠度作为训练样本,输入 4 个观测点的挠度,再利用粒子群算法对自适应神经模糊网络的适应度寻优,反演集中荷载的位置和大小。结果显示,PSO 算法可以有效提高 ANFIS 模型的精度,ANFIS 迭代次数的增加能提高精度。PSO-ANFIS 模型中荷载位置 x_F、y_F 和荷载大小 F 的最大残差分别为 0.027 m、0.025 m 和 0.126 N,最大相对误差分别为 5.00%、4.40% 和 4.50%。

关键词:矩形薄板;PSO-ANFIS 模型;荷载情况反演

中图分类号:V271.5 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2024.06.013

Load inversion of rectangular thin plate based on PSO-ANFIS model

ZHANG Yupeng[1], LIU Wei[2]

(1. College of Civil Engineering,Xi'an University of Architecture and Technology,710055 Xi'an,China;
2. School of Science,Xi'an University of Architecture and Technology,710055 Xi'an,China)

Abstract:Load inversion is of great significance in fields like automotive engineering and medical domain, etc. At present, commonly used methods generally have the problems of too many observation points, large amount of calculation and low calculation efficiency. In order to efficiently and accurately invert the load of rectangular thin plate through the deflection of a few observation points, in this paper, a load inversion of adaptive network-based fuzzy inference system (ANFIS) is optimized based on particle swarm optimization (PSO). Analytical method was used to solve the deflections of rectangular thin plates under different concentrated loads as training samples, and the deflections of four observation points were input. PSO was then used to optimize the fitness of the ANFIS, and the position and size of the concentrated load are retrieved. The results show that the PSO can effectively improve the accuracy of ANFIS model, and the increase of iteration times of ANFIS can improve the accuracy. In the PSO-ANFIS model, the maximum re-

收稿日期:2022-01-12 **修回日期**:2022-10-15
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11872287)
通信作者:刘韡,教授。E-mail: 1633649163@qq.com
引用格式:张宇鹏,刘韡. 基于 PSO-ANFIS 模型的矩形薄板荷载情况反演[J]. 应用力学学报,2024,41(6):1336-1342.
ZHANG Yupeng, LIU Wei. Load inversion of rectangular thin plate based on PSO – ANFIS model[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2024,41(6):1336-1342.

siduals of load positions x_F、y_F and load F were 0.027 m,0.025 m and 0.126 N,and the maximum relative errors were 5.00% ,4.40% and 4.50% ,respectively.

Key words:rectangular sheet; PSO-ANFIS model; load case inversion

工程领域常常有一些力学的正反问题。通过薄板的物理参数求解挠度为正问题[1],通过薄板的挠度求解荷载情况为反问题。

通过薄板的挠度求解荷载情况大量应用于各种领域。例如,在汽车工程领域,碰撞实验时,通过反演被撞击板上的荷载大小和情况,可以优化撞击性能,以做出针对性改良[2];在医学领域,不良肿块会严重挤压其他器官,需要通过反演得到压迫点和荷载大小,判断是否需要手术。

荷载情况的计算针对不同对象的复杂程度往往有很大区别。例如,对于秤这种简单的模型,用胡克定律即可反算出荷载大小;对于薄板这种复杂的模型,通过部分点的挠度间的关系很难推导出具体的荷载情况。对于矩形薄板荷载情况反演,早期常采用穷举法,即根据荷载情况可能出现的范围值,结合薄板的参数计算所有可能性,并根据结果进一步缩小取值范围进行计算,直到得到满足误差水平的计算结果,该方法存在效率过低的问题。学者们相继提出了基于荷载归一化统计平均法的反演方法[3]、基于波形去噪的反演方法[4]、基于等效原理和简化模型的反演方法[5]等,但上述研究成果普遍存在反演的精度和效率问题。

结合神经网络模型在复杂关系处理方面表现出高泛化性、高精度的特点[6],提出一种基于粒子群算法优化(particle swarm optimization,PSO)的自适应神经模糊系统(adaptive network-based fuzzy inference system,ANFIS)的矩形薄板荷载情况反演模型,利用粒子群算法对适应度进行寻优,同时利用自适应神经模糊系统优异的学习性能,结合矩形薄板部分点位的实际挠度值,反演矩形薄板的荷载情况。为了减缓海量挠度数据和非线性数据结构对自适应神经模糊系统的影响,采用粒子群算法对自适应神经模糊网络模糊层的适应度值进行寻优,建立高精度的薄板荷载情况反演模型。

1　模型框架

1.1　目标问题

正问题中,通过矩形薄板的物理参数、几何大小、边界条件和荷载情况求解薄板的挠度,这是板壳理论中的经典问题,已经有成熟的解析方法,包括均布荷载、集中荷载等荷载形式下薄板的力学响应。本研究选用集中荷载作为计算样例。

$$f_1(\lambda,F,(x_F,y_F),pw)=0 \qquad (1)$$

式中:p 是微分运算函数的算子;λ 是矩形薄板的弹性模量等自身物理参数;F 、x_F、y_F 为集中荷载情况;w 是薄板的挠度函数。

针对式(1),给出边界条件为

$$w\big|_{\partial\Omega}=w_0,\ pw\big|_{\partial\Omega}=pw_0 \qquad (2)$$

式中,$\partial\Omega$ 是边界。

通过式(1)~(2)得到挠度函数,进而求解矩形薄板的其他力学响应。

反问题中,通过矩形薄板的物理参数、几何大小、边界条件和挠度求解薄板的荷载情况为

$$(F,(x_F,y_F))=f_2(\lambda,pw) \qquad (3)$$

上述情况的边界条件同式(2)

1.2　PSO-ANFIS 模型

ANFIS 是神经网络和模糊系统两者结合的产物,结合了二者分布式信息存储及自适应、自学习能力,在非线性问题上表现优异[7]。作为近年来的热点模型,其基本原理是利用自适应和自我学习数据集建立起模糊推理系统,再利用误差准则修正隶属函数的参数,使得模糊推理系统模仿提供给系统的训练数据的复杂映射关系,从而建立针对特定数据结构下输入与输出之间的对应关系,最后完成对特定输入进行输出预测的工作。在模糊系统中,经常使用 Mamdani 模型[8]和 Sugeno 模型[9]。本研究选用 Sugeno 模型系统,其典型的模糊规则为 if-then 规则,即

$$\text{If } x \text{ is } A \text{ and } y \text{ is } B,\text{then } z=f(x,y) \qquad (4)$$

式中:A、B 是前件中的模糊集合,$z=f(x,y)$ 是后件中的精确函数。若 $f(x,y)$ 为线性函数,则产生的系统为 1 阶 Sugeno 型模糊系统。

规定一个 1 阶 Sugeno 型模糊系统结构包含 2 条模糊规则,则该设定下 ANFIS 模型的基本结构则如图 1 所示。

$$\text{If } x \text{ is } A_1 \text{ and } y \text{ is } B_1,\text{then } f_1=p_1x+q_1y+r_1 \qquad (5)$$

If x is A_2 and y is B_2 ,then $f_2 = p_2 x + q_2 y + r_2$ (6)

式中：x、y 为输入；A_1、B_1、A_2、B_2 为模糊系统中的通用语言；f_1、f_2 为模糊系统的输出；$\{p_i, q_i, r_i\}$（$i = 1, 2, \cdots$）为模糊系统的结论参数集。

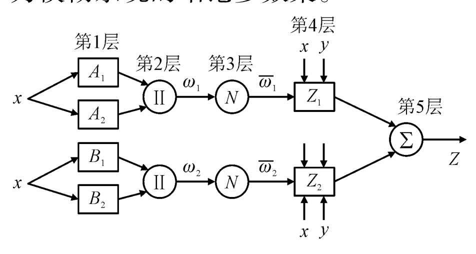


图 1　ANFIS 结构示意图

Fig. 1　ANFIS structure diagram

第 1 层是输入层，主要作用是利用正问题数据作为训练样本。

$$O_i^1 = \mu A_i(x) \quad (i = 1,2) \tag{7}$$

$$O_j^1 = \mu B_j(y) \quad (j = 1,2) \tag{8}$$

式中：O_i^1、O_j^1 是输入层的隶属度；$\mu A_i(x)$、$\mu B_j(y)$ 是各输入层的隶属度函数。本研究选取钟型函数，公式为

$$\mu A_i(x) = \frac{1}{1 + \left|\dfrac{x - c_{A_i}}{a_{A_i}}\right|^{2b_{A_i}}} \quad (i = 1,2) \tag{9}$$

$$\mu B_i(y) = \frac{1}{1 + \left|\dfrac{y - c_{B_j}}{a_{B_j}}\right|^{2b_{B_j}}} \quad (j = 1,2) \tag{10}$$

式中，a_{A_i}、b_{A_i}、c_{A_i}（$i = 1,2$）和 a_{B_j}、b_{B_j}、c_{B_j}（$j = 1,2$）均是前提参数。

第 2 层是模糊规则层，主要作用是通过所有输入信号计算出规则的适应度。

$$O_i^2 = \omega_i = \mu A_i(x) \cdot \mu B_j(y) \quad (i,j = 1,2) \tag{11}$$

式中：O_i^2 为该系统中某条抽象规则的适应度值；ω_i 为该系统中某条抽象规则的激励强度。

第 3 层是归一化层，主要作用是归一化适应度。

$$O_i^3 = \overline{\omega}_l = \frac{\omega_i}{\sum_{i=1}^{2} \omega_i} \quad (i = 1,2) \tag{12}$$

式中：O_i^3 是系统中对应某条抽象规则的归一化适用度值；$\overline{\omega}_l$ 是系统中某条抽象规则对应的适用度占比。

第 4 层是计算输出层，主要作用是计算各条规则的输出结果。

$$O_i^4 = \overline{\omega}_l f_i = \overline{\omega}_l (p_i x + q_i y + r_i) \quad (i = 1,2) \tag{13}$$

其中，O_i^4 是去模糊前的输出值；f_i 是本研究选用的模糊系统结构。

第 5 层是总输出层，主要作用是计算系统的总输出。

$$O_i^5 = \sum_i \overline{\omega}_l f_i = \frac{\sum_i \omega_i f_i}{\sum_i \omega_i} \tag{14}$$

ANFIS 有两种模糊化处理的训练结构，分别是网格分类法与减法聚类法[10]。模糊化处理是为了高效地提取训练样本中的复杂映射关系，从而解析复杂的非线性、大数据问题。本研究选取减法聚类法，其基本原理是通过求解空间中相邻点位的密度，根据相邻点位的密度分布判断该中心点位作为聚类中心的可能性，计算所有点位的可能性后选取系统的聚类中心。参数选取的数值如表 1 所示。

表 1　减法聚类参数

Tab. 1　Subtractive clustering parameter selection

参数	数值	参数	数值
影响半径	0.3	初始步数	0.01
最大迭代次数	300	步长减小率	0.9
目标误差	0.000 1	步长增长率	0.1

再利用 PSO 搜索 ANFIS 中的最佳适应度值，从而提高 ANFIS 模型中参数的优越性，极大地减小人工经验设置的初始参数对模型预测结果的影响，提高模型的泛化性和精度。

粒子群算法的基本原理为如下。

在 N 维搜索空间中，一个种群由 m 个粒子组成，即

$$\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \cdots, \boldsymbol{Z}_m) \tag{15}$$

第 i 个粒子的位置为

$$\boldsymbol{Z}_i = (Z_{i1}, Z_{i2}, \cdots, Z_{iN})^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

式中，Z_{iN} 是第 i 个粒子在第 N 维的位置。根据目标函数计算粒子在位置 $\boldsymbol{Z}_i$ 时的适应度值，利用反演值与解析解值的均方误差（mean square error，MSE）评价粒子的适应度，则

$$R_{\mathrm{MSE}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - X_i')^2}{n} \tag{17}$$

式中：n 是样本数；X_i 是 ANFIS 模型输入的集中荷载情况 F 、x_F、y_F ；X_i' 为 ANFIS 模型输出的集中荷载情况 F'、x_F'、y_F'。

对粒子适应度而言,其数值越小表明该粒子对训练样本的适应性越强,反之,其数值越大表明该粒子对训练样本的适应性越弱。

第 i 个粒子的速度表示为

$$\boldsymbol{V}_i = (V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{iN})^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

式中,V_{iN} 表示第 i 个粒子在第 N 维的速度。而且粒子会根据个体和全局的最优值调整,从而更适应系统的特征,形成一个不断动态调整的粒子群,即

$$V_{iN}^{k+1} = \omega V_{iN}^{k} + c_1 r_1 (P_{iN}^{k} - Z_{iN}^{k}) + c_2 r_2 (P_{jN}^{k} - Z_{jN}^{k}) \tag{19}$$

$$Z_{iN}^{k+1} = Z_{iN}^{k} + \alpha V_{iN}^{k+1} \tag{20}$$

式中:V_{iN}^{k+1} 表示粒子 i 在第 $k+1$ 次迭代中第 N 维的速度;Z_{iN}^{k+1} 粒子 i 表示在第 $k+1$ 次迭代中第 N 维的位置;ω 为惯性权重;c_1 和 c_2 为学习因子。本研究粒子群参数如表 2 所示。

表 2　粒子群算法参数

Tab. 2　Particle swarm algorithm parameters

参数	数值	参数	数值
种群粒子数	20	学习因子 c_2	2.0
最大迭代次数	800	最大惯性权重 ω_{max}	0.9
学习因子 c_1	2.0	最小惯性权重 ω_{min}	0.4

惯性权重是影响 PSO 算法性能的关键因素,从而显著影响组合模型的反演精度,从其对于 PSO 算法的作用方式来看,是用于评价粒子继承度的数据。为了进一步降低初始惯性权重的设定对组合模型预测精度的影响,本研究利用线性递减算法动态调整模型的惯性权重,从而对惯性权重进行寻优。其表达式为

$$\omega_t = \omega_{max} - (\omega_{max} - \omega_{min}) \frac{t}{T} \tag{21}$$

式中:t 为当前迭代次数;T 为最大迭代次数;ω_{max}、ω_{min} 分别为初始最大、最小惯性权重。

1.3　计算流程

构建薄板荷载情况反演模型的步骤和流程如下(图 2)。

步骤 1:整理解析法求解得到的 w_1、w_2、w_3、w_4,作为待输入数据。

步骤 2:确定自适应神经模糊网络模型的基本参数。

步骤 3:确定初始化粒子群算法的基本参数。

步骤 4:将初始自适应神经模糊网络模型计算的结果输出,并提取其中的适应度值,然后将其作为问题的适应度值,从而形成一个粒子,并形成粒子群算法。

步骤 5:确定粒子的初始特性。

步骤 6:利用动态权重算法调整粒子群算法中的惯性权重。

步骤 7:计算粒子群函数中的适应度值并且不断优化粒子。

步骤 8:根据精度情况和最大迭代次数判断模型学习数据复杂映射关系的进程。若满足精度标准或最大迭代次数,则输出最优适应度值带入参数优化后的自适应神经模糊网络模型,最后输出荷载情况反演结果;若不满足精度标准或最大迭代次数,则返回步骤 5。

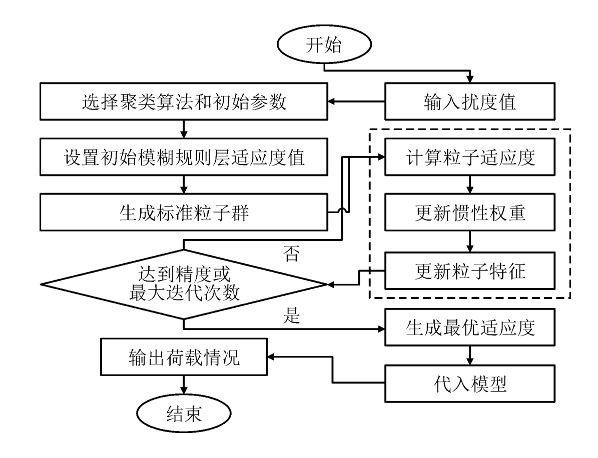


图 2　PSO-ANFIS 算法流程

Fig. 2　Flow chart of PSO-ANFIS

2　算例分析

2.1　算例设置

设置 1 m×1 m 的矩形薄板,厚度为 0.02 m,其泊松比为 0.3,杨氏模量为 1 365 kPa,边界为一边固定三边自由。设荷载为集中荷载,挠度观测点取 4 个,分布如图 3 所示。

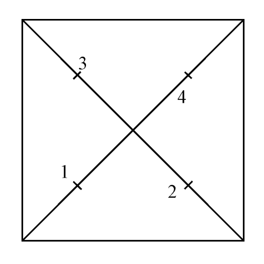


图 3　观测点分布

Fig. 3　Distribution of observation points

将薄板等间距分为10×10的网格,薄板内每个节点为集中荷载作用点,如图4所示。利用正问题方法得到荷载在每个作用点时大小为1、2、3、4 N情况下4个观测点的挠度值,共计324组。每组数据由集中荷载位置x_F、y_F,荷载大小F,4个观测点的挠度值w_1、w_2、w_3、w_4组成。

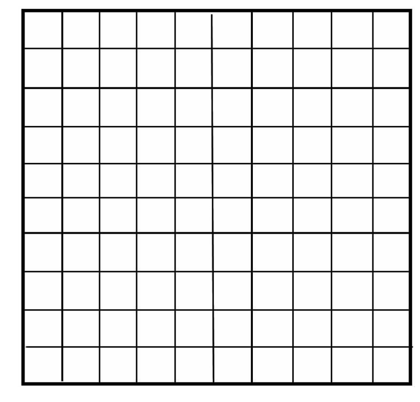


图4 荷载作用点

Fig.4 Load action point

利用上述正问题产生的数据训练ANFIS模型。

利用Random函数随机生成测试样本,将板以两条中线为界划分成了4块,在4块中分别利用随机函数选取一个点,然后在整块板上利用随机函数选取2个点。再利用解析法计算挠度值w_1、w_2、w_3、w_4,得到测试样本如表3所示。

表3 测试样本数据

Tab.3 Test sample data

序号	x_F/m	y_F/m	F/N	w_1/m	w_2/m	w_3/m	w_4/m
1	0.61	0.27	3.1	0.060 4	0.347 0	0.039 8	0.264 6
2	0.91	0.55	0.7	0.018 0	0.130 3	0.019 6	0.139 5
3	0.12	0.31	1.4	0.003 2	0.008 3	0.001 2	0.006 1
4	0.55	0.74	0.2	0.002 7	0.017 7	0.004 0	0.022 1
5	0.74	0.62	2.3	0.047 5	0.326 3	0.054 8	0.362 1
6	0.46	0.93	2.6	0.020 8	0.145 4	0.047 9	0.230 1

模型的精度是能否为工程实践提供指导的重要指标。为了对模型的精度进行评价,利用残差值$\hat{\varepsilon}$分析实际值和反演值的绝对误差,从而分析模型的最大绝对误差是否在可用范围内。利用相对误差δ分析实际值和模型反演值的相对误差,从而分析模型的相对误差是否在可用范围内。如二者均符合相关规定,则证明模型可用。

残差值$\hat{\varepsilon}$为

$$\hat{\varepsilon} = X_i - X_i' \tag{22}$$

相对误差δ为

$$\delta = \frac{X_i - X_i'}{X_i} \times 100\% \tag{23}$$

式中:X_i为荷载位置x_F、y_F或荷载大小F;X_i'为模型反演荷载位置x_F'、y_F'或荷载大小F'。

2.2 结果分析

根据前述流程建立矩形薄板反演的PSO-ANFIS模型,并对随机点位的扰度值进行反演,各点位的结果如表4所示。

分析反演结果的精度,结果如表5所示。

表4 测试样本反演结果

Tab.4 Test sample forecast results

序号	ANFIS			PSO-ANFIS		
	x_F/m	y_F/m	F/N	x_F/m	y_F/m	F/N
1	0.583	0.306	3.343	0.601	0.281	3.226
2	0.867	0.599	0.641	0.883	0.568	0.684
3	0.149	0.335	1.617	0.126	0.320	1.445
4	0.594	0.710	0.224	0.568	0.729	0.209
5	0.695	0.688	2.567	0.727	0.645	2.392
6	0.449	0.899	2.541	0.453	0.912	2.565

表 5　精度指标

Tab. 5　Accuracy index

序号	模型	荷载位置 x_F		荷载位置 y_F		荷载大小 F	
		$\hat{\varepsilon}$ /m	δ /%	$\hat{\varepsilon}$ /m	δ /%	$\hat{\varepsilon}$ /N	δ /%
1	ANFIS	0.027	4.42	-0.306	-13.33	-0.243	-7.84
	PSO-ANFIS	0.009	1.48	-0.011	-4.07	-0.126	-4.06
2	ANFIS	0.043	4.73	-0.049	-8.90	0.059	8.43
	PSO-ANFIS	0.027	2.97	-0.018	-3.27	0.016	2.29
3	ANFIS	-0.029	-24.17	-0.025	-8.06	-0.217	-15.50
	PSO-ANFIS	-0.006	-5.00	-0.010	-3.23	-0.045	-3.21
4	ANFIS	-0.044	-8.00	0.300	4.05	-0.024	-12.00
	PSO-ANFIS	-0.018	-3.27	0.110	1.49	-0.009	-4.50
5	ANFIS	0.045	6.08	-0.068	-10.97	-0.267	-11.61
	PSO-ANFIS	0.013	1.76	-0.025	-4.40	-0.092	-4.00
6	ANFIS	0.011	2.39	0.031	3.33	0.059	2.27
	PSO-ANFIS	0.007	1.52	0.018	1.94	0.035	1.35

分析表 5 可得:ANFIS 模型可以通过 4 个观测点的挠度值反演荷载的位置和大小,荷载位置 x_F、y_F 和荷载大小 F 的最大残差分别为 0.045 m、0.306 m 和 0.267 N,最大相对误差分别为 24.17%、13.33% 和 15.50%。结果显示该模型下反演结果残差值较小,相对误差较大,表明模型可以一定程度上反演荷载的位置和大小,但精度较低。PSO-ANFIS 模型中荷载位置 x_F、y_F 和荷载大小 F 的最大残差分别为 0.027 m、0.025 m 和 0.126 N,最大相对误差分别为 5.00%、4.40% 和 4.50%。结果显示该模型对残差和相对误差的控制都表现较好,表明 PSO 算法能显著的优化 ANFIS 网络,进而提高矩形薄板的荷载位置和大小的反演精度。

分析图 5 ~ 7 可得:迭代次数相同的情况下,PSO-ANFIS 模型平均误差小于 ANFIS 模型。

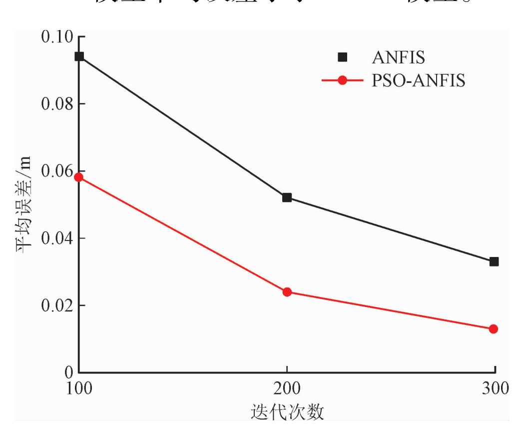


图 5　x_F 平均误差趋势

Fig. 5　Mean error trend of x_F

模型的精度和迭代次数成正比,但迭代次数对精度的影响是逐渐下降的,这是因为训练样本中可供学习的抽象联系是有限的,当模型已经建立了大部分联系后,超过阈值的迭代次数对模型精度无显著影响。

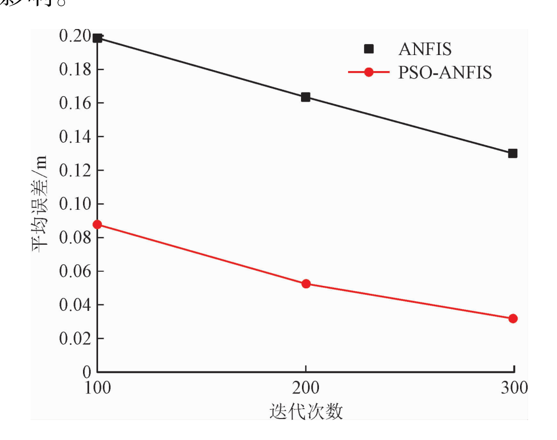


图 6　y_F 平均误差趋势

Fig. 6　Mean error trend of y_F

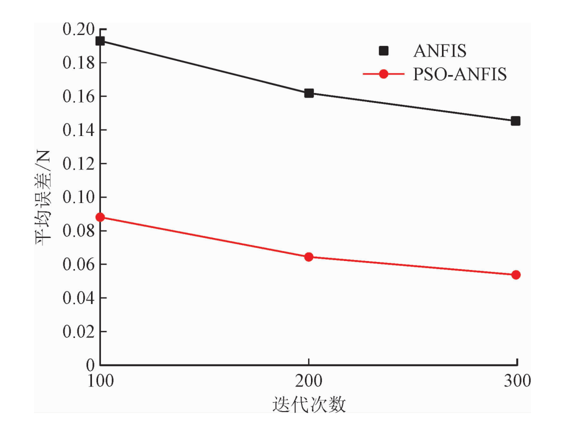


图 7　荷载平均误差趋势

Fig. 7　Mean error trend of F

3 结 论

针对矩形薄板荷载情况反演,自适应神经模糊网络可以高精高效地求解该问题。利用动态粒子群算法优化的自适应神经模糊网络,结合矩形薄板上4个观测点的挠度值,可以高精度地反演出荷载的位置和大小,本研究模型反演出的荷载位置 x_F、y_F 和荷载大小 F 的最大残差分别为0.027 m、0.025 m和0.126 N,最大相对误差分别为5.00%、4.40%和4.50%。该方法可以为工程领域提供参考和指导。

参考文献:

[1] 王春玲,季泽华.一种可适用于正交异性矩形薄板弯曲稳定振动的双重正弦傅立叶级数通解[J].应用力学学报,2010,27(3):616-621.
WANG Chunling,JI Zehua. A double Fourier series solution for the bending,stability and vibration of orthotropic rectangular thin plate[J]. Chinese journal of applied mechanics,2010,27(3):616-621(in Chinese).

[2] WANG F,YAN H H,ZHOU Q,et al. A method of reverse and revision of material mechanics performance parameters for vehicle collision simulation[J]. Thin-walled structures,2021,163:107681.

[3] 陈隽,李杰.高层建筑风荷载反演研究[J].力学季刊,2001,22(1):72-77.
CHEN Juan,LI Jie. Study on wind load inverse of tall building[J]. Chinese quarterly of mechanics,2001,22(1):72-77(in Chinese).

[4] 郅伦海,余攀.基于卡尔曼滤波的高层建筑风荷载反演研究[J].武汉理工大学学报,2016,38(2):57-63.
ZHI Lunhai,YU Pan. Wind load estimation of tall building by a Kalman filtering based inverse method[J]. Journal of Wuhan University of Technology,2016,38(2):57-63(in Chinese).

[5] 李正农,郭昌根,尚扬,等.基于实测加速度的高层建筑风荷载反演[J].自然灾害学报,2017,26(3):113-123.
LI Zhengnong,GUO Changgen,SHANG Yang,et al. Wind load inversion of highrise building based on measured acceleration[J]. Journal of natural disasters,2017,26(3):113-123(in Chinese).

[6] CANE V R. Mathematical models for neural networks[C]//Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Durham,Project Euclid,1967:21-36.

[7] HAKIM S J S,RAZAK H A. Adaptive neuro fuzzy inference system (ANFIS) and artificial neural networks (ANNs) for structural damage identification[J]. Structural engineering and mechanics,2013,45(6):779-802.

[8] 王贵君,李晓萍,隋晓琳.广义Mamdani模糊系统依K-积分模的泛逼近及其实现过程[J].自动化学报,2014,40(1):143-148.
WANG Guijun,LI Xiaoping,SUI Xiaolin. Universal approximation and its realization of generalized Mamdani fuzzy system based on K-integral norms[J]. Acta automatica Sinica,2014,40(1):143-148(in Chinese).

[9] 巩增泰,李巧霞.基于Sugeno测度的半一致模有序加权平均算子及其递归集成器设计[J].模糊系统与数学,2019,33(6):11-28.
GONG Zengtai,LI Qiaoxia. SUOWA operators based on Sugeno measures and its recursive systems[J]. Fuzzy systems and mathematics,2019,33(6):11-28(in Chinese).

[10] 梁辉,童朝南.基于减法聚类的带钢厚度数据驱动建模[J].北京科技大学学报,2012,34(11):1338-1345.
LIANG Hui,TONG Zhaonan. Online data-driven modeling for strip thickness based on subtractive clustering[J]. Journal of University of Science and Technology Beijing,2012,34(11):1338-1345(in Chinese).

(编辑 李坤璐)